



Prof. Dr. H.-D. Donder

Parmenides García Cornejo, Andreas Fackler

Wintersemester 2010/2011

28. Oktober 2010

Maßtheorie und Integralrechnung mehrerer Variablen

Tutorium 2

Aufgabe 1: Sei f eine Treppenfunktion auf $\mathbb{R}^n$. Sind

$$\sin \circ f \quad \text{und} \quad \cos \circ f$$

ebenfalls Treppenfunktionen?

Aufgabe 2: Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ mit $\|f\|_1 < \infty$. Sei $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $g : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ definiert durch $g(x) = f\left(\frac{x}{\alpha}\right)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Was ist $\|g\|_1$?

Aufgabe 3: Bestimmen Sie das Integral der folgenden Funktionen:

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, \quad f(x) = \begin{cases} \infty & \text{falls } x = (0, 0) \\ 0 & \text{falls } x \neq (0, 0) \end{cases}$$
$$g : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, \quad f(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x = \frac{1}{n+1} \text{ für ein } n \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Aufgabe 4: Zeigen Sie, dass die folgende Funktion nicht Lebesgue-integrierbar ist:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, f(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ falls } x < 0 \\ \frac{(-1)^n}{n+1} & , \text{ falls } x \in [n, n+1) \end{cases}$$

Existiert das uneigentliche Integral

$$\int_0^\infty f(x)dx = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a f(x)dx?$$



Prof. Dr. H.-D. Donner

Parmenides García Cornejo, Andreas Fackler

Wintersemester 2010/2011

25. Oktober 2010

Maßtheorie und Integralrechnung mehrerer Variablen

Lösungsskizze zu Tutorium 2

Aufgabe 1: Sei $f = \sum_{i=1}^k a_i \mathbf{1}_{Q_i}$ eine Darstellung von f mit disjunkten Quadern Q_i (möglich nach Lemma 1). Dann ist an jeder Stelle höchstens einer der Summanden von 0 verschieden und wegen $\sin(0) = 0$ gilt:

$$\sin \circ f = \sum_{i=1}^k \sin(a_i) \mathbf{1}_{Q_i}$$

Jedoch ist $\cos \circ f$ keine Treppenfunktion: Für alle $x \notin \bigcup_{i=1}^k Q_i$ gilt nämlich $\cos(f(x)) = 1$; die Menge der x , für die $\cos(f(x)) = 1$ ist, ist also unbeschränkt. Ist jedoch $g = \sum_{i=1}^m b_i \mathbf{1}_{P_i}$ eine Treppenfunktion, so verschwindet $g(x)$ für alle $x \notin \bigcup_{i=1}^m P_i$, das heißt, die Menge der x , für die $g(x) \neq 0$ ist, ist beschränkt. Also kann g nicht $\cos \circ f$ sein.

Aufgabe 2: $\varphi = \sum_{i=0}^{\infty} c_i \mathbf{1}_{(a_i, b_i)}$ ist eine Hüllkurve von f genau dann, wenn $\psi = \sum_{i=0}^{\infty} c_i \mathbf{1}_{(\alpha a_i, \alpha b_i)}$ Hüllkurve von g ist, denn:

$$\psi(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i \mathbf{1}_{(\alpha a_i, \alpha b_i)}(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i \mathbf{1}_{(a_i, b_i)}\left(\frac{x}{\alpha}\right) = \varphi\left(\frac{x}{\alpha}\right)$$

Es ist aber:

$$I(\psi) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i (\alpha b_i - \alpha a_i) = \alpha \sum_{i=0}^{\infty} c_i (b_i - a_i) = \alpha I(\varphi)$$

Nun ist $\|f\|_1$ nach Definition das Infimum aller $I(\varphi)$ mit Hüllkurven φ von f . Nach dieser Rechnung ist $\|g\|_1$ das Infimum aller $\alpha I(\varphi)$ für Hüllkurven φ von f . Also ist $\|g\|_1 = \alpha \|f\|_1$.

Aufgabe 3: Sei $h_n = n \cdot \mathbf{1}_{\{(0,0)\}}$ für $n \in \mathbb{N}$. Jedes h_n ist eine Treppenfunktion, da $\{(0,0)\} = [0,0] \times [0,0]$ ein Quader (mit Volumen 0) ist. Die h_n bilden also eine monoton wachsende Folge von Treppenfunktionen mit Integral 0. Nach dem kleinen Satz von Levi ist also der punktweise Limes der Folge h_n ebenfalls integrierbar mit Integral 0. Dieser Limes ist aber f .

Das gleiche Argument, nur mit den Treppenfunktionen $h_n = \sum_{k=0}^n \mathbf{1}_{\{1/(n+1)\}}$, zeigt $\int g dx = 0$.

Aufgabe 4: Angenommen, f wäre integrierbar. Dann wäre auch $|f|$ integrierbar. Nach Definition ist für jedes $N \in \mathbb{N}$ die Treppenfunktion

$$h_N = \sum_{n=0}^N \frac{1}{n+1} \mathbf{1}_{[n, n+1)}$$

kleiner oder gleich $|f|$, also ist wegen der Monotonie des Integrals

$$\int |f| dx \geq \int h_N dx = \sum_{n=0}^N \frac{1}{n+1}.$$

Dies divergiert aber gegen ∞ (harmonische Reihe), also muss $\|f\|_1 = \int |f| dx = \infty$ sein.

Andererseits ist

$$\int_0^a f dx = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{(-1)^n}{n+1} + \frac{(-1)^N}{N+1} (a - N) \quad \text{für } a \in [N, N+1),$$

was für $a \rightarrow \infty$ gegen $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$ konvergiert.